Problem for Introduction to Computation.
Battle of Waterloo.

Imagina que és Napoleão na batalha de Waterloo de 18 Junho 1815. Estás a combater um adversário imponente, as tropas do General Wellington. Este trabalho de programação vai mostrar que história poderia tornar-se diferente se o Napoleão tivesse acesso à potência computacional dos computadores de hoje.

Atrás das linhas do Napoleão ficava uma bateria de canhões apontada além da sua vanguarda às tropas de Wellington, veja a figura na página seguinte. O Napoleão disparou os canhões, mas demorou muito tempo para determinar / aprender as definições correctas. Com alguma experiência o método de tentativas succesivas resulta em encontrar os parâmteros, mas calcular com computador seria mais rápido.

Considere a figura na página seguinte. A nossa vanguarda disse-nos que a distância entre os nossos canhões e as tropas de Wellington é exactamente 1700 m. Infelizmente nós não temos controlo sobre a velocidade inicial das bolas de canhão, que é sempre 500 km/h. Só podemos mudar o ângulo de saida, θ. A questão é: onde vai cair a bola? Nós não queremos ultrapassar o alvo, ou ainda pior abater as nossas tropas. Para os cálculos vamos usar as leis Newton:

$$\text{(I)}\ \frac{dv_y}{dt} = -g \qquad \text{(II)}\ \frac{dy}{dt} = v_y \qquad \text{(III)}\ \frac{dx}{dt} = v_x$$

v_y : velocidade vertical [m/s]
v_x : velocidade horizontal [m/s]
t : tempo [s]
g : constante de gravidade = 9.81 [m/s^2]

Para esta situação sem fricção é possível calcular tudo analiticamente; a trajectória é uma parábola. Se o canhão estiver ao mesmo nível do que o inimigo ($y_{\text{end}} = y_0 = 0$) o raciocínio é: No cume da parábola a velocidade vertical v_y é zero. É fácil determinar o momento quando a bola chega ao este ponto. Via I e II: $v_y = v_{y0} - g\,t$, então $t_{\text{top}} = v_{y0}/g$. Quando a bola chega outra vez ao chão, depois 2 vezes t_{top} e percorreu uma distância horizontal de $2\,t_{\text{top}}\,v_{x0} = 2\,v_{x0}\,v_{y0}/g$.

- Faz um programa que calcule a distância da bola com parâmetro o ângulo (0^o é horizontal). Usa 1 ms para o incremento do tempo. Usa unidades SI (m, s, etc.). Para um ângulo de 30^o a bola chega a ________m.
- Aumenta o programa com um ciclo para explorar todos os ângulos (incremento 1^o). A distância maior é para um ângulo de _______^{o}. Chega ao Wellington's com um ângulo de _______^{o}.

Normalmente é vantajoso ficar nos montes. Agora vamos ver porquê.

- Muda o programa da forma que o canhão fica 300 m mais alto do que o inimigo. A distância máxima agora é _______ m para um ângulo de ________^{o}.

Agora assuma que existe fricção do ar. Isto addiciona os seguintes termos

$$\text{(IV)}\ \frac{dv_y}{dt} = -fv_y \qquad \text{(V)}\ \frac{dv_x}{dt} = -fv_x$$

- Põe outra vez o canhão no chão (0 m). Assuma uma fricção $f = 0.01\ s^{-1}$. Muda o programa da forma de incluir a fricção. Com um ângulo de 45^{o} a bola do canhão chega a _________ m. O ângulo para embater no inimigo agora é __________^{o}.
- Com vento nas costas (20 m/s) e com o ângulo acima, vamos errar _______ m.

Opcional: Na verdade a fricção não é linear mas cúbica:

$$\text{(VI)}\ \frac{d|v|}{dt} = -f_3 |v|^3$$

Implementa a fricção cúbica com $f_3 = 0.001\ s/m^2$. Qual a distância da bola para um ângulo 45^{o}? Resposta: _______ m.